توسعه روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف جهت شبیه‌سازی جریان‌های سرعت‌پایین دوبعدی

کاظم هجران‌فر[۱*]، محیی حاجی حسن پور[۲]
استادیار دانشکده مهندسی هوافضا دانشگاه صنعتی شریف، کارشناس ارشد ایرودینامیک دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

در تحقیق حاضر، روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف توسعه داده شده و برای محاسبه جریان‌های سرعت‌پایین دوبعدی ارزیابی می‌شود. معادله شبکه بولتزمن درنظر گرفته‌شده برمبنای فشار بوده و از شبکه D2Q9 برای گسسته‌سازی سرعت‌های میکروسکوپیک استفاده شده است. برخلاف اغلب روش‌های عددی، روش طیفی هم‌مکانی چبیشف نیاز به استفاده از میرایی عددی و یا فیلترسازی نداشته و به دلیل داشتن همگرایی نمایی، حل‌های بسیار دقیق فراهم می‌شود. برای این منظور، مشتقات مکانی در معادله شبکه بولتزمن با استفاده از روش طیفی هم‌مکانی چبیشف گسسته‌سازی شده است. انتگرال‌گیری زمانی در معادله بولتزمن با استفاده از روش صریح رانگ-کوتای مرتبه چهار انجام می‌پذیرد تا حلگری دقیق در مسائل ناپایا فراهم شود. برای نشان دادن صحت و دقت حل حاضر، جریان ناپایای کوئت و جریان دائم روی پله روبه‌پشت حل شده است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد روش شبکه بولتزمن طیفی هم-مکانی چبیشف می‌تواند به عنوان حلگری بسیار دقیق در جریان‌های سرعت‌پایین دوبعدی استفاده شود.

کلمات: معادله شبکه بولتزمن، روش طیفی هم‌مکانی چبیشف، جریان‌های سرعت‌پایین

۱- مقدمه

در دو دهه اخیر روش شبکه بولتزمن (LBM) با موفقیت برای مطالعه پدیده‌های فیزیکی و شبیه‌سازی مسائل دینامیک جریان به عنوان تکنیک محاسباتی جایگزین قدرتمند برای حل‌گرهای ناویر-استوکس مرسوم توسعه داده شده است. از نقطه‌نظر محاسباتی، معادله شبکه بولتزمن (LBE) هذلولی می‌باشد که می‌تواند به صورت محلی حل گردد، و به طور کارآمد روی کامپیوترهای موازی اعمال گردد. سادگی برنامه‌نویسی و سهولت لحاظ کردن ارتباط‌های میکروسکوپیک برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی از مزایای دیگر LBM می‌باشد. LBM استاندارد برای حل دقیق مسائل کاربردی با گرادیان‌های فشار بزرگ به دلیل تغییرات شدید چگالی سیال مناسب نمی‌باشد که به عنوان خطای تراکم پذیری شناخته می‌شود. تلاش‌هایی زیادی که برای حذف یا کاهش

خطای تراکم‌پذیری در LBM برای شبیه‌سازی جریان‌های تراکم‌ناپذیر انجام شده است که می‌توان آن‌ها را به دو دسته مجزا تقسیم می‌کند: روش‌های برمبنای چگالی که در این روش، رابطه معادله حالت بین فشار و چگالی تغییر می‌کند [۱،۲] و روش‌های برمبنای فشار [۳،۴]. هر دوی این روش‌ها دارای مزایا و معایبی می‌باشند. روش برمبنای چگالی برای جریان‌های چندفازی یا چندجزیی مناسب می‌باشد و روش‌های برمبنای فشار به صورت مستقیم متغیر فشار را حل می‌کند و معادله ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر از طریق بسط چپمن-انسکوگ به‌دست می‌آید.

روش LBM استاندارد (برخورد و انتشار) با وجود مزایای بسیاری که دارد، دارای معایبی نیز می‌باشد که می‌توان به محدود بودن آن به شبکه‌های یکنواخت، دقت مرتبه دو و ناپایداری در رینولدزهای بالا اشاره کرد. یکی از راه‌های غلبه بر معایب LBM استاندارد، حل مستقیم LBE می‌باشد. در همین راستا در دهه اخیر تلاش‌هایی برای استفاده روش‌های عددی مرسوم در دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) برای حل LBE انجام شده است. روش‌های تفاضل محدود (FD) [۵]، حجم محدود (FV) [۶]، المان محدود (FE) [۷]، و اخیراً گالرکین ناپیوسته المان-طیفی (SEDG) [۸] روش‌های هستند که برای بهبود دقت و کارایی LBM استفاده‌شده‌اند.

در تحقیق حاضر روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف (CCSLBM) برای شبیه‌سازی جریان‌های دوبعدی سرعت‌پایین توسعه داده شده است. روش طیفی هم‌مکانی چبیشف برای گسسته‌سازی مشتقات مکانی و روش رانگ-کوتا مرتبه چهار صریح برای انتگرال‌گیری زمانی استفاده شده است. مسائل جریان پایا و ناپایا برای ارزیابی دقت و کارایی روش حل حاضر بررسی شده که شامل جریان کوئت ناپایا و جریان پایا روی پله روبه‌پشت می‌باشند و نتایج آن‌ها با دیگر نتایج عددی و تحلیلی مقایسه شده است.

۲- معادلات حاکم

معادله بولتزمن حاکم بر تابع توزیع ذره f با یک زمان آرامش و با تخمین BGK به صورت زیر بیان می‌شود [۹]:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+e.\nabla f=-\frac{1}{\tau}(f-f^{eq}) \qquad (۱)$$

که τ زمان آرامش برخورد بدون بعد، e سرعت ذره و f^{eq} تابع توزیع تعادلی می‌باشد. یک مدل شبکه مربعی دوبعدی با نه جهت سرعت (D2Q9) برای گسسته‌سازی معادله **Error! Reference source not found.** در پیکربندی شبکه (لتیس) استفاده می‌شود. شکل ۱ یک میدان حل برای معادله LB با تابع توزیع f_α در جهت سرعت میکروسکوپیک e_α را نشان می‌دهد. با گسسته‌سازی فوق، معادله شبکه بولتزمن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}+e_\alpha.\nabla f_\alpha=-\frac{1}{\tau}\left(f_\alpha-f_\alpha^{eq}\right),\ \alpha=0,1,\ldots,8 \qquad (۲)$$

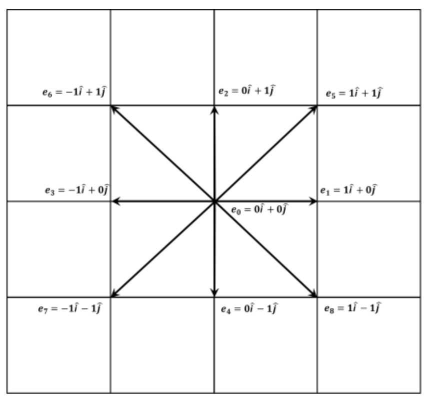
که زیرنویس α جهت سرعت ذره را نشان می‌دهد. در مدل بولتزمن گسسته D2Q9، سرعت‌های میکروسکوپیک به صورت زیر است:

$$e_\alpha = \begin{cases} (0,0) & \alpha = 0 \\ \left[\cos\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-1}{2}\pi\right)\right]c & \alpha = 1,2,3,4 \\ \left[\cos\left(\frac{\alpha-5}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi\right), \sin\left(\frac{\alpha-5}{2}\pi+\frac{1}{4}\pi\right)\right]\sqrt{2}c & \alpha = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (۳)$$

که $c = \Delta x / \Delta t$ سرعت انتشار ذره‌ها بین گره لتیس و نزدیک‌ترین همسایه هستند و Δx و Δt واحد طول لتیس و اندازه گام زمانی می‌باشد. سرعت انتشار مربوط به سرعت حرارتی ذره‌های سیال که توسط پارامتر سیال T_f، ثابت بولتزمن k_B و جرم ذره‌های m تعریف می‌شود با رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$c = \sqrt{\frac{k_B T_f}{\chi^m}} \quad (۴)$$

در اینجا، χ مشخصه‌ای از مدل LB با مقدار ثابت است. برای مدل D2Q9 مقدار χ برابر $\chi = 1/3$ قرار داده می‌شود.



شکل ۱: شبکه D2Q9 و سرعت‌های میکروسکوپیک

تابع توزیع تعادلی f^{eq} به گونه‌ای انتخاب می‌شود که معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر را از طریق فرآیند بسط چپمن-انسکوگ ارضا کند. در فرم تراکم‌پذیر معادله شبکه بولتزمن برمبنای فشار، تابع توزیع تعادلی به صورت زیر داده می‌شود:

$$f_\alpha^{eq} = w_\alpha \left[p + p_0 \left(3\frac{e_\alpha u}{c^2} + \frac{9}{2}\frac{(e_\alpha u)^2}{c^4} - \frac{3}{2}\frac{u u}{c^2} \right) \right] \quad (۵)$$

که $\mathrm{u} = (\mathrm{u}, \mathrm{v})$ بردار سرعت و ضریب وزنی w_α برای مدل D2Q9 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_{\alpha}=\begin{cases}\frac{4}{9} & \alpha=0\\ \frac{1}{9} & \alpha=1,2,3,4\\ \frac{1}{36} & \alpha=5,6,7,8\end{cases} \qquad (۶)$$

فشار سیال ماکروسکوپیک p و سرعت ماکروسکوپیک u از معادله‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$p=\sum_{\alpha=0}^{8} f_{\alpha} \qquad (۷)$$

$$p_0 u=\sum_{\alpha=0}^{8} e_{\alpha} f_{\alpha} \qquad (۸)$$

که $p_0=c_s^2\rho_0$ و ρ_0 چگالی ثابت سیال است. معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر می‌توانند از فرم تراکم‌ناپذیر مدل LB از طریق فرآیند بسط چپمن-انسکوک استخراج گردد [۱۰]:

$$\frac{1}{C_s^2}\frac{\partial P}{\partial t}+\nabla u=0 \qquad (۹)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u.\nabla u=-\nabla P+\nu\nabla^2 u \qquad (۱۰)$$

که $P=p/\rho_0$ فشار نرمالایزشده و υ مقدار فیزیکی لزجت سینماتیکی سیال می‌باشد. زمان آرامش τ برای مدل LB تفاضل محدود از رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\tau=\frac{\nu}{C_s^2} \qquad (۱۱)$$

که $c_s=c\sqrt{\chi}$ سرعت صوت مدل LB می‌باشد.

۳- فرآیند گسسته‌سازی

در روش چبیشف هم‌مکانی طیفی متداول، نقاط درون‌یاب در بازه [۱,۱-]، نقاط هم‌مکانی چبیشف-گوئس-لوباتو $\xi_j=cos(j\pi/N)$ برای $j=0,\ldots,N$ که ماکزیمم مرتبه n چندجمله‌ای‌های چبیشف $T_n(\xi)=cos(n\arccos\xi)$ هستند تعریف می‌شود. حال به منظور انجام مشتق‌های تابع $u(\xi)$ در نقاط هم-مکانی ξ_j می‌توان از رابطه زیر استفاده نمود [۱۱]:

$$u^{(r)}(\xi_k)=\sum_{j=0}^{N} D_{kj}^{(r)}u(\xi_j),\quad r=1,2,\ldots \qquad (۱۲)$$

که $D_{kj}^{(r)}$ ، درایه‌های ماتریس مشتق‌گیر مرتبه r هستند. درایه‌های ماتریس مشتق‌گیر مرتبه اول و دوم می‌تواند توسط رابطه‌های زیر به‌دست آید [۱۲]:

$$D_{kj}=\begin{cases}\dfrac{\lambda_j}{\lambda_k}\dfrac{1}{\xi_k-\xi_j} & if\ \ k\neq j\\ -\displaystyle\sum_{i=0,i\neq k}^{N}\dfrac{\lambda_i}{\lambda_k}\dfrac{1}{\xi_k-\xi_i} & if\ \ k=j\end{cases} \qquad (۱۳)$$

که در این رابطه:

$$\lambda_k^{-1}=\prod_{i=0,i\neq k}^{N}\left(\xi_k-\xi_i\right) \qquad (۱۴)$$

برقرار است. حال برای ماتریس مشتق‌گیر مرتبه دوم یعنی ${D_{kj}}^{(2)}$ داریم:

$$ {D_{kj}}^{(2)}=\begin{cases}2D_{kj}\left(D_{kk}-\dfrac{1}{\xi_k-\xi_j}\right) & if\ \ k\neq j\\ 2\left(D_{kk}\right)^2+2\displaystyle\sum_{i=0,i\neq k}^{N}D_{ki}\ \dfrac{1}{\xi_k-\xi_i} & if\ \ k=j\end{cases} \qquad (۱۵)$$

این ماتریس مشتق‌گیر توسط اشنایدر و ورنر پیشنهاد شده و استفاده از آن سبب جلوگیری از رشد خطای گرد کردن در مسائلی می‌شود که در آن از شبکه ریزی استفاده شده است.

در روش طیفی هم‌مکانی چبیشف، چندجمله‌ای‌های عمودی به طور کلی در بازه‌ی $\xi=[-1,1]$ تعریف می‌شوند و ماتریس مشتق‌گیر نیز براساس همین نقاط به‌دست می‌آید و همچنین تجمع نقاط در نزدیکی نقاط $\xi_N=-1$ و $\xi_0=1$ بیشتر می‌باشد. گاهی در دامنه فیزیکی نیاز است محاسبات در بازه‌ی دلخواه $x=[a,b]$ انجام شود که درنتیجه، به یک نگاشت بین دامنه محاسباتی $\xi=[-1,1]$ و دامنه فیزیکی $x=[a,b]$ نیاز می‌باشد. برای این منظور، می‌توان از نگاشت جبری زیر استفاده کرد:

$$x_i=\frac{a-b}{2}\ \xi_i+\frac{a+b}{2}\ ,\ i=0,\ldots,N\ ,\quad \xi\in[-1,1] \qquad (۱۶)$$

حال برای ماتریس‌های مشتق‌گیر مرتبه اول و دوم نیز روابط زیر حاکم می‌باشد:

$$D(\mathrm{x})=\mathrm{D}(\xi)[\frac{2}{a-b}] \qquad (۱۷)$$

$$D^{(2)}(\mathrm{x})=\mathrm{D}^{(2)}(\xi)[\frac{2}{a-b}]^2 \qquad (۱۸)$$

در حالت دوبعدی برای گسسته‌سازی در جهت x تنها لازم است که سطرهای ماتریس مشتق‌گیر را در ستون‌های u ضرب کرده و برای گسسته‌سازی در جهت y نیز بایستی ستون‌های $\left(D^y\right)^T$ (ترانهاده ماتریس D^y) را در سطرهای u ضرب نمود.

حال برای انتگرال‌گیری زمانی از معادله شبکه بولتزمن، معادله (۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}=R(f_\alpha) \qquad (۱۹)$$

$$R\left(f_{\alpha}\right)=-\left(e_{\alpha x}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x}+e_{\alpha y}\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial y}\right)-\frac{1}{\tau}\left(f_{\alpha}-f_{\alpha}^{eq}\right) \qquad (۲۰)$$

سپس حل در زمان t با استفاده از روش رانگ-کوتای چهارمرحله‌ای پیشروی می‌کند. این روش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{cases} f_{\alpha}^{0}=f_{\alpha}^{t} \\ f_{\alpha}^{k}=f_{\alpha}^{0}+\zeta_{k}\Delta t R^{k-1}\left(f_{\alpha}\right), \quad k=1,2,3,4 \end{cases} \qquad (۲۱)$$

که پارامتر $\zeta_k(k=1,2,3\ \text{and}\ 4)$ متناظراً دارای مقادیر $1/4$ ، $1/3$، $1/2$ و 1 می‌باشند. روش انتگرال‌گیری رانگ-کوتای مرتبه چهار برای محاسبه دقیق جریان‌های ناپایا مناسب می‌باشد.

۴- شرایط مرزی

روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف نیازمند شرایط مرزی مناسب برای متغیرهای ماکروسکوپیک و میکروسکوپیک می‌باشد. در معادله LB، تابع توزیع f_{α} به صورت مستقیم در مرزها داده نمی‌شود و باید رفتار خاصی برای مقادیر آن‌ها برمبنای متغیرهای ماکروسکوپیک روی هر مرز استفاده شود. برای این کار بایستی ابتدا مقادیر ماکروسکوپی از میدان حل‌شده درون‌یابی شود. بعد از به‌روزرسانی مقادیر ماکروسکوپیک در مرزها، تابع توزیع تعادلی f^{eq} با استفاده از رابطه (۵) به‌روز می‌شود. حال برای محاسبه تابع توزیع f_{α} در گام زمانی جدید، می‌توان معادله (۲) اعمال‌شده در مرزها را به وسیله الگوریتمی مشابه که برای نقاط داخلی به‌کارگیری می‌شود را اعمال و حل عددی نمود.

روی دیواره‌ها با شرط عدم لغزش، مقادیر مؤلفه‌های سرعت ماکروسکوپیک معلوم و صفر هستند و بنابراین تنها مجهول فشار می‌باشد. با ساده‌سازی معادلات ناویر-استوکس روی دیواره می‌توان مشاهده نمود که رابطه زیر حاکم می‌باشد:

$$\frac{\partial p}{\partial y_{n}}=\mu\frac{\partial^{2}u_{n}}{\partial y_{n}^{2}} \qquad (۲۲)$$

که y_n راستای عمود بر سطح و u_n سرعت عمود نسبت به مرز می‌باشد. بنابراین، با اعمال روش طیفی هم-مکانی چبیشف می‌توان مقدار فشار روی دیواره را از نقاط درون میدان حل به‌دست آورد.

برای شرط مرزی ورودی، مقادیر مؤلفه‌های سرعت ماکروسکوپیک معلوم هستند و بنابراین تنها مجهول فشار می‌باشد. برای ارضای معادلات حاکم روی مرز ورودی (مثلا در جریان پله روبه‌پشت)، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial p}{\partial y_{n}}=\mu\left(\frac{\partial^{2}u_{n}}{\partial y_{n}^{2}}+\frac{\partial^{2}u_{n}}{\partial y_{t}^{2}}\right) \qquad (۲۳)$$

که t جهت مماسی بر مرز مورد نظر می‌باشد.

در اینجا برای اعمال شرط مرزی خروجی نیز از شرط زیر با فشار خروجی ثابت در مرز استفاده می‌شود و سرعت‌ها نیز توسط روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial u}{\partial y_n}=0 \quad (۲۴)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y_n}=0 \quad (۲۵)$$

۵- نتایج و بحث

جریان کوئت تراکم‌ناپذیر ناپایا بین دو صفحه برای نشان دادن دقت و کارایی حل حاضر بررسی شده است. جریان از طریق حرکت صفحه‌ی بالایی در راستای x با سرعت ثابت ($u=u_0=\text{const},\ v=0$) رانده می‌شود. حل دقیق پروفیل سرعت نرمالایزشده برای جریان کوئت صفحه‌ای از رابطه زیر به‌دست می‌آید [۱۳]:

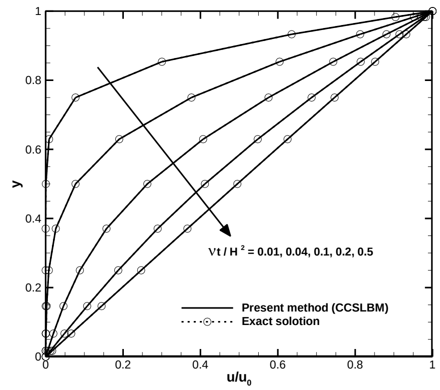
$$\frac{u}{u_0}=\frac{y}{H}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)exp\left(-\frac{(n\pi)^2\,\nu t}{H^2}\right) \quad (۲۶)$$

که در $t=0$ شرایط اولیه و در $t=\infty$ یا به عبارت دیگر در $\nu t/H^2=\infty$ حل پایا خواهد بود. محاسبات برای شبکه‌های محاسباتی مختلف و در رینولدزهای $Re=u_0H/\upsilon=10$ برای مشخص کردن دقت حل حاضر نسبت به حل تحلیلی انجام شده است. عرض بین صفحه‌ها برابر $H=1$ انتخاب شده است. شکل ۲، پروفیل سرعت نرمالایزشده را برای شبکه (13×13) و $u_0=0.01$ در زمان‌های بی‌بعد مختلف نشان داده است. مشاهده می‌شود که نتایج با حل دقیق مطابق دارند. این نتایج برای $\nu t/H^2=0.01, 0.04, 0.1, 0.2, 0.5$ نمایش داده شده است.

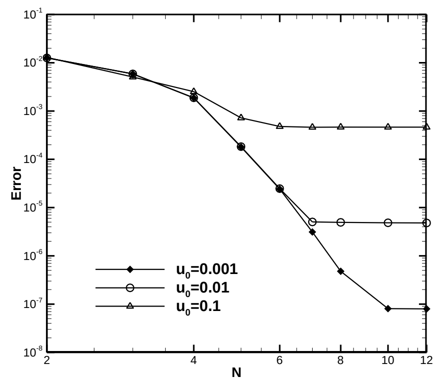
برای بررسی دقت طیفی، نرم خطا به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$L_2=\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}\left(\frac{u_{i,j}}{u_0}-\frac{u_{i,j}^{\text{exact}}}{u_0}\right)^2}{N_xN_y}} \quad (۲۷)$$

در شکل ۳، اثر سرعت مشخصه روی دقت حل بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با کاهش سرعت مشخصه، دقت حل بهبود و همگرایی طیفی به‌دست می‌آید. در حقیقت، با کاهش مقدار سرعت مشخصه u_0 ، اثرات تراکم‌پذیری در میدان جریان کاهش یافته و نتایج به سمت حل دقیق نزدیک‌تر می‌شوند.



شکل ۲: مقایسه پروفیل سرعت u برای جریان کوئت با Re=10 در نقاط گوئس-گوباتو



شکل ۳: اثر سرعت مشخصه روی دقت طیفی در جریان کوئت

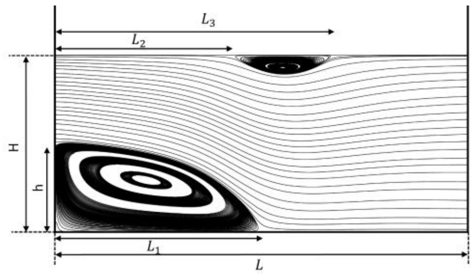
جریان پیرامون پله روبه‌پشت نیز نمونه آزمایش مناسبی برای بررسی دقت و عملکرد یک روش عددی توسعه داده‌شده است. هندسه این مسئله در شکل (۴) نشان داده شده است. اگرچه این هندسه ساده به نظر می‌رسد، شامل ویژگی‌های پیچیده‌ای از جریان شامل نواحی جدایش جریان می‌باشد (شکل (۵)). برای مسئله پله روبه‌پشت، نتایج تجربی و عددی وجود دارد که نشان می‌دهند ناحیه جریان جدایش ثانویه‌ای در دیواره بالایی برای $\mathrm{Re} \geq 400$ ایجاد می‌شود. نتایج حل حاضر برای جریان پله روبه‌پشت برای رینولدزهای $100 \leq \mathrm{Re} \leq 500$ به‌دست آمده و با نتایج قابل دسترس مقایسه شده است.

برای این مسئله و در مرز ورودی، سرعت به صورت رابطه‌ای سهموی به شکل معادله (۲۸) تعریف می‌شود:

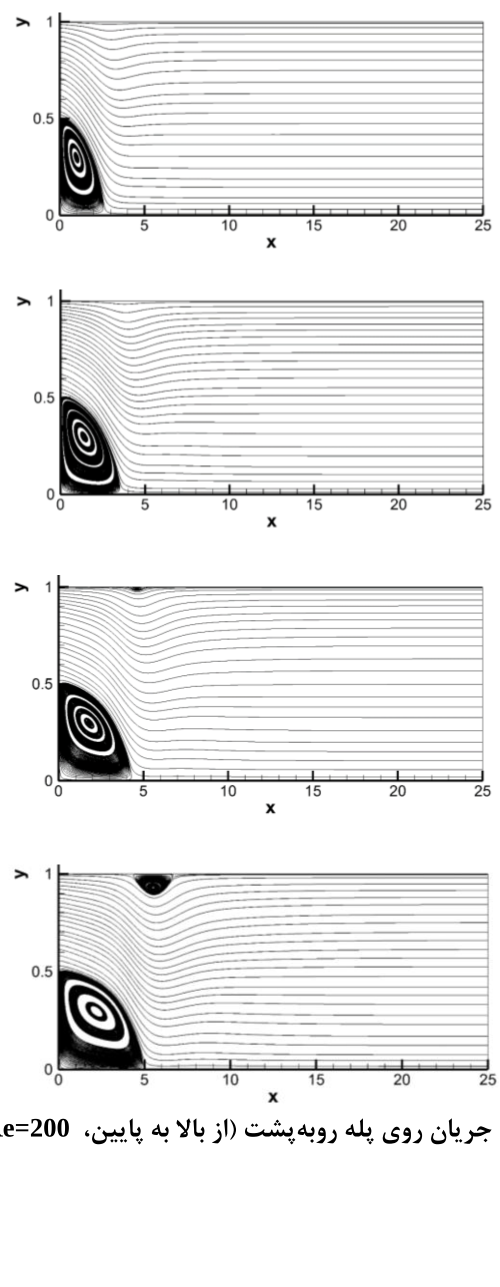
$$u(y) = 6u_0(H-y)(y-h)/(H-h)^2 \qquad (۲۸)$$

و شرط عدم لغزش برای مؤلفه‌های سرعت روی دیواره اعمال می‌شود. در مرز خروجی، شرط مرزی خروجی با برون‌یابی مؤلفه‌های سرعت و مقدار ثابت برای فشار به‌دست می‌آید. عدد رینولدز برمبنای سرعت ورودی u_0 (در اینجا $u_0 = 0.1$)، ارتفاع کانال $H = 2h$ و لزجت سینماتیکی υ تعریف می‌شود. در اینجا ارتفاع پله

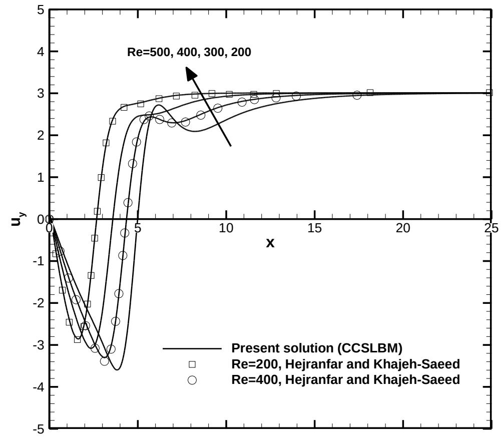
$h = H/2 = 0.5$ قرار داده شده و طول کانال ۵۰ برابر ارتفاع پله درنظر گرفته شده است. این طول‌ها به نحوی انتخاب شده‌اند تا شرط کاملاً توسعه‌یافتگی را در شرط خروجی ارضا نمایند.



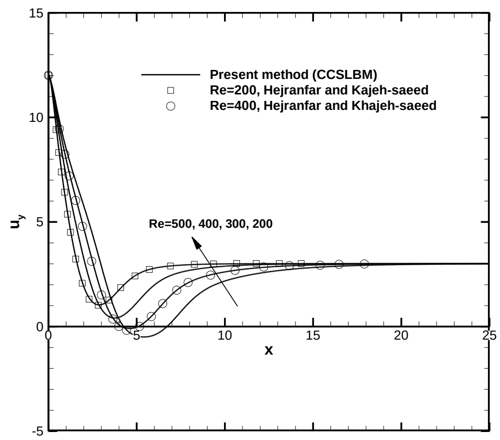
شکل ۴: هندسه مسئله پله روبه‌پشت و تعریف پارامترهای مهم جریان



شکل ۵: خطوط جریان حالت پایا برای جریان روی پله روبه‌پشت (از بالا به پایین، Re=200، Re=300، Re=400، Re=500)



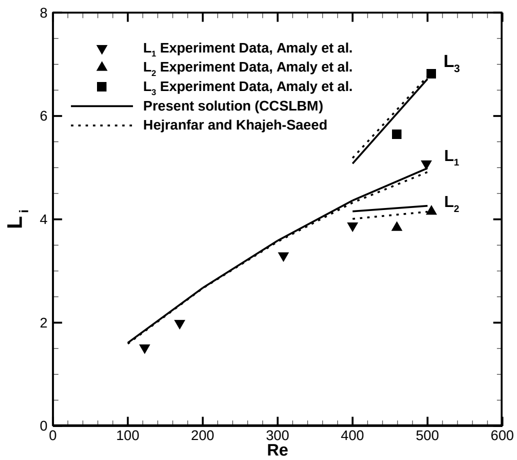
(الف)



(ب)

شکل ۶: مقایسه چرخش روی الف) دیواره پایینی ب) دیواره بالایی برای جریان روی پله روبه‌پشت به‌ازای Re=200, 300, 400, 500

شکل (۵)، میدان جریان محاسبه‌شده برای پله روبه‌پشت را به وسیله خطوط جریان برای رینولدز ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود با افزایش عدد رینولدز گردابه پشت پله بزرگ‌تر و گردابه ثانویه ایجاد می‌شود. ناحیه جدایش ثانویه در رینولدز حدود ۴۰۰ تشکیل می‌شود که با اندازه‌گیری‌های تجربی نیز هم‌خوانی دارد. همچنین مقدار چرخش روی دیوارهای بالایی و پایینی در رینولدزهای مختلف در شکل (۶) نشان داده شده و با نتایج مرجع [۱۴] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود این نتایج با یکدیگر مطابقت خوبی دارند. در شکل (۷) نیز مقایسه طول‌های مربوط به نواحی جدایش اولیه و ثانویه جریان با نتایج تجربی [۱۵] و عددی [۱۴] آمده است که از هم‌خوانی خوبی برخوردارند. نتایج نشان می‌دهد با افزایش عدد رینولدز جریان، نواحی جدایش جریان گسترش می‌یابد.



شکل ۷: مقایسه اندازه طول نواحی جدایش اولیه و ثانویه برای جریان روی پله روبه‌پشت در اعداد رینولدز مختلف

۶- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف توسعه داده شده و برای حل جریان‌های ناپایا و پایا ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهد همگرایی طیفی حاصل شده و برای حل‌هایی دقیق‌تر بایستی از سرعت مشخصه پایین‌تری استفاده شود تا خطای تراکم‌پذیری کاهش یابد. عدم نیاز به هر نوع فیلترینگ و یا میرایی عددی برای پایداری الگوریتم حل از دیگر ویژگی‌های کار حاضر می‌باشد که امکان شبیه‌سازی تا رینولدزهای بالا را فراهم می‌سازد. نتایج به‌دست‌آمده حاکی از آن است که روش شبکه بولتزمن طیفی هم‌مکانی چبیشف برای تحلیل و بررسی جریان‌های سرعت‌پایین بسیار کارآ و دقیق بوده و می‌تواند جایگزین مناسبی برای حل‌گرهای ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر مرتبه‌بالا به خصوص روشهای طیفی باشد.

۷- مراجع

[1] S. Marconi, B. Chopard, and J. Latt, “Reducing the compressibility of a lattice Boltzmann fluid using a repulsive force”, Modern Physics C, Vol. 14, Issue 8, 1015-1026 (2003).

[2] H.P. Fang, R.Z. Wan, and Z.F. Lin, “Lattice Boltzmann model with nearly constant density”, Physical Review E, 66(036314), 1-4 (2002).

[3] Z.L. Guo, B. Shi, and N. Wang, “Lattice BGK model for incompressible Navier-Stokes equation”, Computational Physics, Vol. 165, Issue 1, 288-306 (2000).

[4] Y. Chen and H. Ohashi, “Lattice-BGK Methods for Simulating Incompressible Fluid Flows”, Modern Physics C, Vol, 8, Issue 4, 793-803 (1997).

[5] S.C. Fu, R.M.C. So, and W.W.F. Leung, “Stochastic finite difference lattice Boltzmann method for steady incompressible viscous flows”, Computational Physics, Vol. 229, Issue 1, 6084–6103 (2010).

[6] V. Patil and K.N. Lakshmisha, “Finite volume TVD formulation of lattice Boltzmann simulation on unstructured mesh”, Computational Physics, Vol. 228, Issue 1, 5262–5279 (2009).

[7] Y. Li, E.J. LeBoeuf, and P.K. Basu, “Least-squares finite-element scheme for the lattice Boltzmann method on an unstructured mesh”, Physical Review E, 72(046711) (2005).
[8] M. Min and T. Lee, “A spectral-element discontinuous Galerkin lattice Boltzmann method for nearly incompressible flows”, Computational Physics, Vol. 230, Issue 1, 245–259 (2001).
[9] R. Mei, L. Luo, and W. Shyy, “An Accurate Curved Boundary Treatment In the Lattice Bltzmann Method”, Computational Physics, Vol. 155, Issue 2, 307-330 (1999).
[10] Q. Zou, S. Hou, S. Chen, and G.D. Doolen, “An improved incompressible lattice Boltzmann model for time-independent flows”, Statistical Physics, Vol. 81, Issue 2, 35-48 (1995).
[11] M.T. Darvishi, “Spectral Collocation Method and Darvishi’s Preconditioning for Tchebyshev-Gauss-Lobatto Points”, International Mathematical Forum, Vol. 2, Issue 6, 263-272 (2007).
[12] C. Schneider, and W. Werner, “Some new aspects of rational interpolation”, Math. Comp., Vol. 47, Issue 175, 285–299 (1986).
[13] F.V. White, “Viscous Fluid Flow”, 3th ed., McGraw-Hill, New York (2006).
[14] K. Hejranfar and A. Khajeh-Saeed, “Implementing a High-Order Accurate Implicit Operator Scheme for Solving Steady Incompressible Viscous Flows using Artificial Compressibility Method”. Numerical Methods in Fluids, Vol. 66, Issue 8, 939-962 (2011).
[15] B.F. Armaly, F. Durst, J.C.F. Pereira, and B. Schonung, “Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow”, J. of Fluid Mechanics, Vol. 127, Issue 1, 473-496 (1983).

Development of a Chebyshev Collocation Spectral Lattice Boltzmann Method (CCSLBM) for Simulation of 2D Low Speed Flows

K. Hejranfar[1], M. Haji Hassan Pour[2]

[1]Associate Professor, Aerospace Engineering Department, Sharif University of Technology, Iran

[2]MSc. Graduate, Aerospace Engineering Department, Sharif University of Technology, Iran

khejran@sharif.edu

Abstract

In this study, a Chebyshev collocation spectral lattice Boltzmann method (CCSLBM) is developed and assessed for the computation of 2D low speed flows. The lattice Boltzmann (LB) equation based on the pressure distribution function is considered and the D2Q9 discrete Boltzmann model is used. Unlike other numerical methods, the Chebyshev collocation spectral method does not need any numerical dissipation or filtering for the solution to be stable and due to the exponential decay of the error it leads to highly accurate solutions. Herein, the space discretization in the LB equation is performed by the Chebyshev collocation spectral method. To provide accurate unsteady solutions, the time integration of the temporal term in the LB equation is made by the fourth-order Runge-Kutta scheme. Two 2D test cases are simulated herein that are the steady flow over a backward facing step and the unsteady Couette flow. Indications are that the CCSLBM developed and applied herein can be used as a highly 2D low speed flow solver.

Key Words: Lattice Boltzmann equation, Chebyshev collocation spectral method, Low speed flows.